Indukce, kvantifikátory, supremum

3b. cvičení

Matematika 1, NMMA701, Ondřej Bouchala

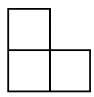
Příklady:

1. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí vztah

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 3$, $a_2 = 7$ a pro $n > 2$ platí $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. Najděte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti, a dokažte jeho správnost.

3. Mějme šachovnici s rozměry $2^n \times 2^n$, na které chybí pravé horní políčko. Dokažte, že se dá tato šachovnice vydláždit s pomocí dílků tohoto tvaru (dílky se mohou otáčet):



4. Vyjádřete následující výroky pomocí kvantifikátorů:

   a) Každý zná každého.

   b) Někdo zná každého.

   c) Každý zná někoho.

   d) Někoho nikdo nezná.

5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. O f řekneme, že je **nerozhodná**, pokud je na nějakém otevřeném intervalu rostoucí a na nějakém otevřeném intervalu klesající. Zapište tuto definici pomocí kvantifikátorů.

∗ 6. Vyjádřete co nejjednodušeji:

   a) $\forall \varepsilon > 0\, \forall y \in \mathbb{R}\colon\ (|y - 7| < 5) \Rightarrow (|f(y) - 15| < \varepsilon)$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 1\, \forall y \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ (|y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n})$

∗ 7. Znegujte následující výrok: „Každý si někdy rád dá jedno pivo, ale ne vždy a ne v každé hospodě.“

8. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

   a) $\left\{\frac{p}{p+q}\colon\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\right\}$

   b) $\{\sin x\colon\ x \in [0, 2\pi]\}$

   c) $\{\sin x\colon\ x \in (0, 2\pi)\}$

   d) $\{\sin x\colon\ x \in (0, \pi)\}$

   e) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$

   f) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n > m\}$

   g) $\{n^2 - m^2\colon\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n \leq m\}$

   h) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$

   i) $\{2^{-n} + 3^{-n}\colon\ n \in \mathbb{Z}\}$

   j) $\{5^{(-1)^m \cdot 3^n}\colon\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$